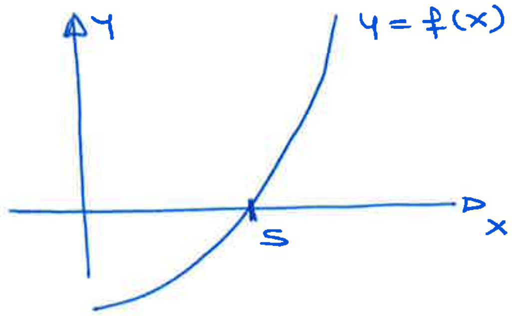
SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

Problema: Dada $f(x)$ no lineal se trata de encontrar s tal que $f(s)=0$

A s se la denomina cero de $f(x)$ o raíz / solución de la ecuación $f(x)=0$

Ejemplo: La ecuación $x^3-6x^2+11x-6=0$ tiene la raíz $x=s=2$ ya que $2^3-6\cdot 2^2+11\cdot 2-6=0$

¿Qué significa gráficamente que s es un cero de $f(x)$ o raíz de $f(x)=0$?



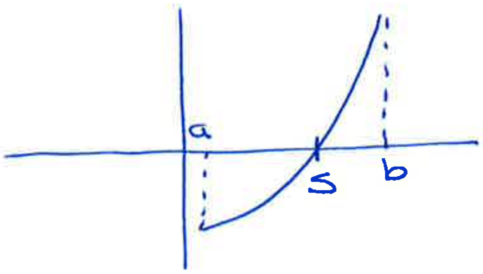
Que la gráfica de $f(x)$ corta al eje de las x $(y=0)$ en s

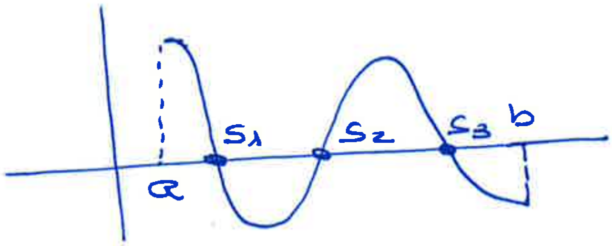
Para calcular las raíces de la ecuación $f(x)=0$, se recurre a métodos iterativos que consisten en construir una sucesión, a partir de un valor x_0 inicial, denotada por $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = s$

Hay distintas maneras de construir la sucesión $\{x_n\}$ que dan lugar a distintos métodos iterativos: Bisección, Newton, secante, etc.

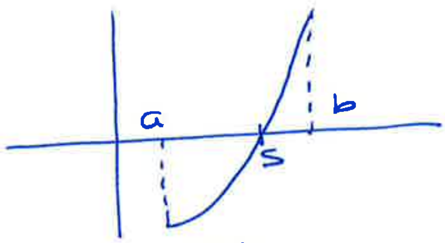
Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y tal que $f(a)\,f(b)<0$ (la función en los extremos del intervalo tiene distinto signo) existe al menos un $s\in(a,b)$ tal que $f(s)=0$

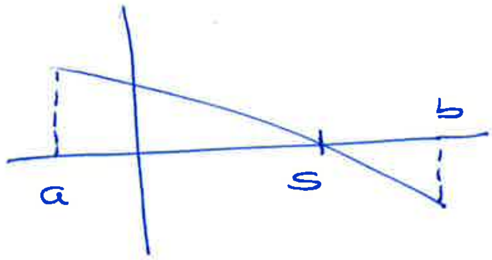




Si $\forall x \in [a,b]$, además de cumplirse $f(a)f(b)<0$ se cumple $f'(x)\neq 0$ la raíz s en el intervalo $[a,b]$ es única



$f'(x)>0$



$f'(x)<0$

1. MÉTODO DE LA BISECCIÓN para resolver $f(x)=0$

$f(x)$ continua en $[a,b]$ y tal que $f(a)f(b)<0$

1ª iteración:

$[a_1,b_1]=[a,b]$

calculamos el pto medio de $[a_1,b_1]$

$$x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$$

calculamos

$$f(x_1)\Longrightarrow\begin{cases}\text{si } f(x_1)=0 \Rightarrow s=x_1 & \text{Hemos encontrado la raíz y paramos}\\ \text{si } f(x_1)\neq 0 \Rightarrow \text{Hacemos la 2ª iteración}\end{cases}$$

2ª iteración

$$[a_2, b_2] \equiv \begin{cases} [a_1, x_1] & \text{si } f(a_1)\,f(x_1) < 0 \\ \\ [x_1, b_1] & \text{si } f(x_1)\,f(b_1) < 0 \end{cases}$$

(Al ser x_1 el pto medio de $[a_1, b_1]$, la longitud de $[a_2, b_2] = \frac{1}{2}$ longitud de $[a_1, b_1]$)

calculamos el pto. medio de $[a_2, b_2]$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

calculamos

$$f(x_2) \Longrightarrow \begin{cases} \text{si } f(x_2) = 0 \Rightarrow S = x_2 & \text{Hemos encontrado la raíz y paramos} \\ \\ \text{si } f(x_2) \neq 0 \Rightarrow & \text{Hacemos la 3ª iteración} \end{cases}$$

3ª iteración

$$[a_3, b_3] \equiv \begin{cases} [a_2, x_2] & \text{si } f(a_2)\,f(x_2) < 0 \\ \\ [x_2, b_2] & \text{si } f(x_2)\,f(b_2) < 0 \end{cases}$$

(longitud de $[a_3, b_3] = \frac{1}{2}$ longitud $[a_2, b_2] =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \text{ longitud } [a_1, b_1]\right) = \frac{1}{2^2}$ longitud $[a_1, b_1] =$

$= \frac{1}{2^2}$ longitud $[a, b]$)

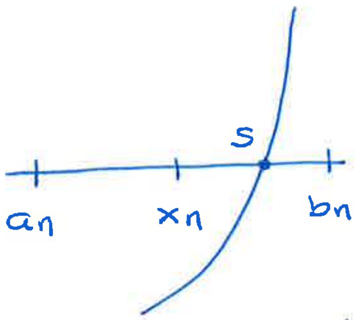
calculamos el pto medio de $[a_3, b_3]$

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

y se repite el procedimiento de las etapas anteriores

n-ésima iteración

$[a_n, b_n]$ y calculamos $x_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$



Si tomamos x_n como aproximación a la raíz s de $f(x)=0$, el error cometido será:

$$|e_n| = |s - x_n| \lesssim \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})\right) =$$
$$= \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \cdots$$
$$= \frac{1}{2^n}(b-a)$$

Entre una iteración y otra el intervalo se reduce a la mitad y por tanto, también el error

$$|e_{n+1}| \lesssim \frac{1}{2}|e_n|$$

Métodos lineales (o de convergencia lineal)

Son aquellos que cumplen $|e_{n+1}| \lesssim k|e_n|$ con $k<1$, es decir el error se reduce en una constante k en cada paso

El método de la bisección es un método lineal con $k = \frac{1}{2}$

Recordando $e \simeq 10^{-\text{nº cifras significativas correctas}}$

$$\log_{10}(e_{n+1}) \lesssim \log_{10} k + \log_{10}(e_n)$$
$$-\log_{10}(e_{n+1}) \gtrsim -\log_{10} k - \log_{10}(e_n)$$
$$\text{nº cifras en etapa }(n+1) \gtrsim \text{nº cifras en etapa } n - \log_{10} k$$

Si $k<1 \Rightarrow \log_{10} k < 0$ y en cada iteración se aumenta de forma constante el nº de cifras significativas, aunque si k ~~no~~ no es muy pequeño se puede necesitar más de una iteración para ganar una cifra completa

Métodos cuadráticos (o de convergencia cuadrática)

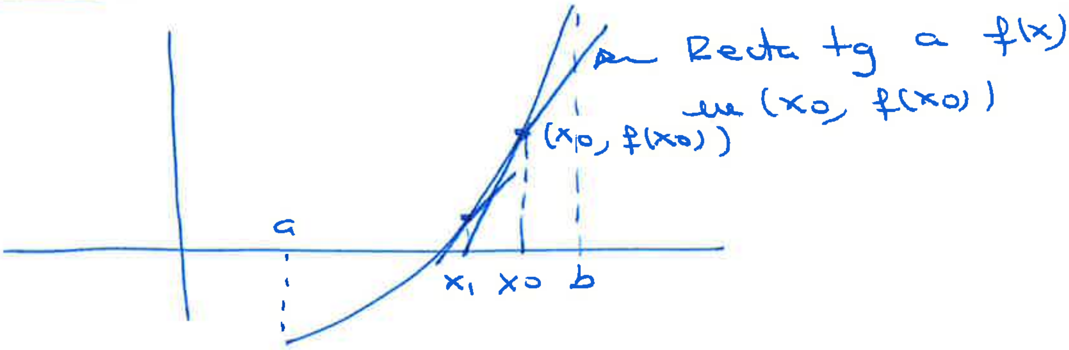
Son aquellos que cumplen $|e_{n+1}| \lesssim k\,|e_n|^2$

$$-\log_{10}(e_{n+1}) \gtrsim -\log_{10}k - 2\log_{10}(e_n)$$

$$\text{cifras en } (n+1) \gtrsim 2 \text{ cifras en } n - \log_{10}k$$

Es decir, el nº de cifras correctas se duplica, aproximadamente, en cada iteración

2. MÉTODO DE NEWTON para resolver $f(x)=0$



Tomamos $x_0 \in [a,b]$ donde está la raíz s

Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Calculamos su intersección con el eje de las x $(y=0)$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (\text{si } f'(x_0) \neq 0)$$

~~Ecuación de la recta tangente a f(x) en (x1, f(x1))~~

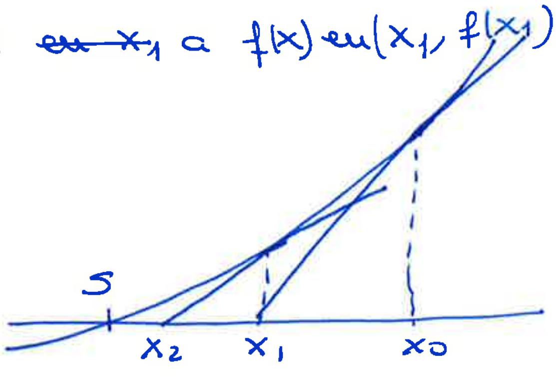
~~y = f(x1~~

Observaciones:

- Hay que conocer $f'(x)$
- x_1 más próximo a s que x_0 (¿cómo se elige x_0?)

Si calculamos la recta tangente ~~en x_1~~ a $f(x)$ en $(x_1, f(x_1))$

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$



y su intersección con $y=0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_2)}$$

Repitiendo el procedimiento

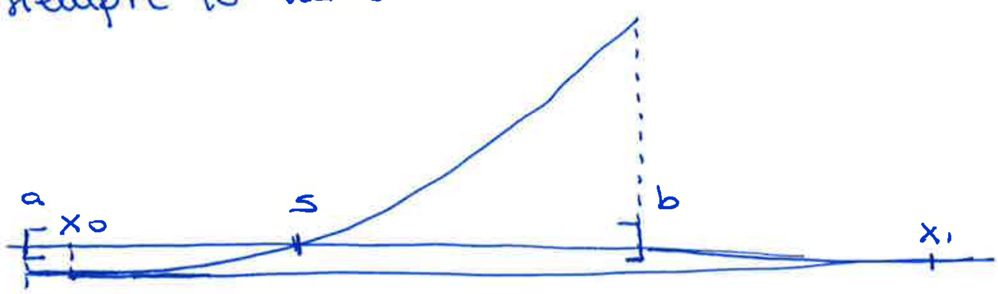
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El método de Newton cuando converge lo hace muy rápidamente. El método de Newton es un método cuadrático que duplica ~~decimales correctos~~ nº de cifras significativas correctas en cada iteración

Ventajas del método: su velocidad

Desventajas: Hay que conocer $f'(x)$ lo que en ocasiones es engorroso y en otras completamente imposible (no tenemos una expresión de $f(x)$ que se pueda derivar)

Al contrario que en la bisección que siempre converge, Newton no siempre lo hace



En este caso, si tomamos este x_0, al aplicar

el método x_1 sale fuera del intervalo $[a,b]$ que contiene la raíz y dependiendo de cómo sea la función al hacer la siguiente iteración podemos o no volver a entrar en $[a,b]$ y tener convergencia o no hacia la raíz s

El método de Newton converge siempre si partimos de un x_0 suficientemente próximo a la raíz s. Para garantizar que x_0 está suficientemente próximo a s comenzamos reduciendo el intervalo con el método de la bisección y seguidamente "arrancamos" el método de Newton.

Supongamos que x_0 está suficientemente próximo a s. Desarrollando en serie de Taylor la función $f(x)$ en un entorno del punto x_0:

$$f(s) = f(x_0) + f'(x_0)(s-x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2!}(s-x_0)^2 \text{ con}$$

ξ_0 entre s y x_0 y supuesto que existen f' y f'' en ese entorno

Al ser s raíz de $f(x)=0 \Rightarrow f(s)=0$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(s-x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2!}(s-x_0)^2. \text{ Si } f'(x_0)\neq 0$$

$$0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + (s-x_0) + \frac{1}{2!}\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}(s-x_0)^2$$

Por el método de Newton

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

sustituyendo

$$0 = s - x_1 + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}(s-x_0)^2$$

$$x_1 - s = \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)}(s-x_0)^2$$

$$|e_1| = \left|\frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)}\right| |e_0|^2$$

Supongamos que el método es convergente y x_n y s

$$f(s) = f(x_n) + f'(x_n)(s-x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2!}(s-x_n)^2$$

ξ_n entre s y x_n

Puesto que $f(s)=0$ por ser s raíz de $f(x)=0$

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(s-x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2!}(s-x_n)^2$$

Si $f'(x_n)\neq 0$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (s-x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2!\,f'(x_n)}(s-x_n)^2$$

El método de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

por tanto

$$x_{n+1} - s = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_n-s)^2$$

$$e_{n+1} = \left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\right| e_n^2$$

$\xi_0, \dots, \xi_n$ no tienen porqué coincidir pero si ~~llamamos~~ llamamos

$$M = \frac{\text{máx}\,|f''(x)|}{2\,\text{mín}\,|f'(x)|}$$ y $x \in$ al entorno de s

$$e_{n+1} \leq M e_n^2 \; ; \quad n = 0, 1, \dots$$

Si $e_1 \le M e_0^2$

$$e_2 \le M e_1^2 \le M (M e_0^2)^2 = M \left(\frac{1}{M} (M e_0^2)\right)^2 = \frac{1}{M}(M e_0)^{2^2}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{e_n \le \frac{1}{M}(M e_0)^{2^n}}$$

Si $M e_0 < 1$ hay convergencia y se verifica si se parte de un x_0 próximo a s

Teorema

Si $f \in C^2$ en un entorno de la raíz s, verificándose $f'(s) \neq 0$, si $M e_0 < 1$ ($e_0 = |x_0 - s|$) con $M = \dfrac{\max |f''(x)|}{2 \min |f'(x)|}$ el método de Newton converge

(M siempre se puede calcular porque al ser $f'(s) \neq 0$ se verificará $f'(x) \neq 0$ por continuidad para $x \simeq s$)

Otra cota del error

$$f(s) = f(x_n) + f'(\xi_n)(s - x_n)$$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}(s - x_n)$$

pero $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -(x_{n+1} - x_n)$

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}\right| |s - x_n|$$

Pero $f'(\xi_n) \simeq f'(x_n)$ para ξ_n y x_n próximos a s

$$|x_{n+1} - x_n| \simeq |x_n - s|$$

$$e_n \simeq |x_{n+1} - x_n|$$

Un criterio de parada para el método será iterar hasta que la diferencia $|x_{n+1} - x_n|$ esté por debajo de un error dado

3. MÉTODO DE LA SECANTE

Intenta evitar el cálculo de $f'(x_n)$ en Newton

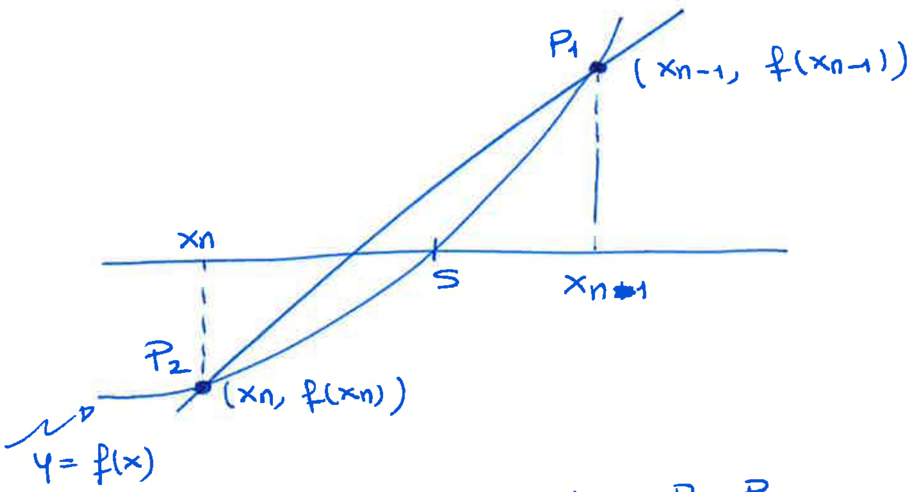
$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

sustituyendo esta aproximación en la fórmula de Newton, obtenemos:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

En este método se necesitan 2 valores x_0 y x_1 para iniciar el método

¿Por qué se llama de la secante?

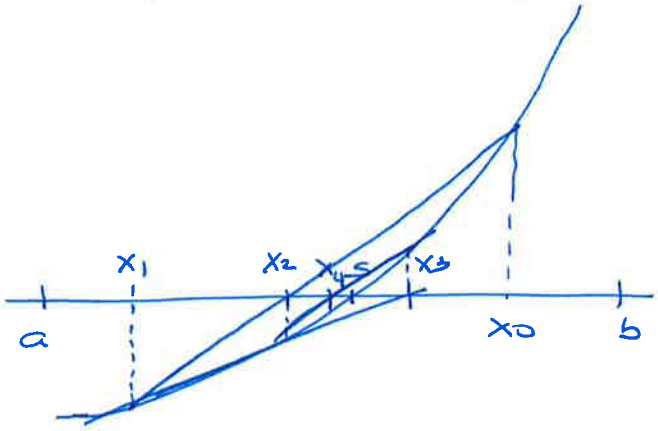


Recta que pasa por los puntos P_1, P_2

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

Corte con $y=0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



Cuando este método converge, su convergencia no es cuadrática como en Newton pero es algo mejor que la lineal

$$e_{n+1} \simeq k \, e_n^{1'6}$$